SOLUCIONES 1er EXAMEN PARCIAL
ANÁLISIS COMPLEJO (7/11/2013)

1. Estudie la continuidad de la función

$$f(z) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{|z|^2}{z}\right) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

- Si $z \neq 0$ entonces $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{|z|^2}{z}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{z \cdot \bar{z}}{z}\right) = \operatorname{sen} \bar{z}$.

Así, dado que las funciones $g(z) = \bar{z}$ y $h(z) = \operatorname{sen} z$ son continuas $\forall z \in \mathbb{C}$, su composición $h \circ g$ también lo es. Por tanto, $\forall z \neq 0$, $f(z) = h \circ g(z)$ y f es continua.

- Si $z = 0$, estudiamos si existe el límite de f en $z=0$ y si coincide con $f(0)$:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \operatorname{sen} \bar{z} = \operatorname{sen} 0 = 0 = f(0).$$

Luego f también es continua en $z=0$.

Concluyendo: $\boxed{f \text{ ES CONTINUA EN } \mathbb{C}}$

2. Halle una función holomorfa f tal que su parte real es

$$u(x,y) = e^{-3y} \cos(3x) - 6(x-\pi)y$$

y verifica $f(\pi) = -1$. Especifique dónde es holomorfa y escríbala en función de z.

Por una parte se tiene que:

$\boxed{z = x+iy}$

- $e^{-3y} \cos(3x) = \operatorname{Re}\left(e^{-3y+i3x}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{3i(x+iy)}\right) = \operatorname{Re}(e^{3iz})$

Por otra parte, llamando $\tilde{x} = x - \pi$ resulta:

- $6(x-\pi)y = 3 \cdot 2\tilde{x} \cdot y = 3 \operatorname{Im}\left((\tilde{x}+iy)^2\right) = 3 \operatorname{Re}\left(-i(\tilde{x}+iy)^2\right)$

$\boxed{\operatorname{Im}(\alpha+i\beta) = \operatorname{Re}(-i(\alpha+i\beta))}$

$= \operatorname{Re}\left(-3i(x+iy-\pi)^2\right) =$

$= \operatorname{Re}\left(-3i(z-\pi)^2\right)$

$\boxed{z = x+iy}$

Por tanto,

$$u(x,y) = Re\left(e^{3iz}\right) - Re\left(-3i(z-\pi)^2\right) = Re\left(e^{3iz}+3i(z-\pi)^2\right)$$

$$= Re\left(e^{3iz}+3i(z-\pi)^2+ki\right)$$

siendo $k \in \mathbb{R}$. Luego, si $f(z) = e^{3iz}+3i(z-\pi)^2+ki$ se tiene que $Re\, f = u$.

Como $f(\pi) = -1$ entonces

$$-1 = f(\pi) = e^{i3\pi} + 3i \cdot 0 + ki = -1 + ki \Rightarrow k = 0$$

En definitiva, la función pedida es

$$\boxed{f(z) = e^{i3z} + 3i(z-\pi)^2}$$

que es una función entera pues es suma del polinomio $3i(z-\pi)^2$ y la función e^{i3z}, que es composición del polinomio $i3z$ con la función exponencial.

OTRA FORMA: La función pedida es

$$f(x+iy) = \underbrace{e^{-3y}\cos(3x) - 6(x-\pi)y}_{u(x,y)} + i\,v(x,y)$$

y ha de satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Luego,

$$u_x(x,y) = -e^{-3y}\operatorname{sen}(3x)\cdot 3 - 6y = v_y(x,y).$$

Integrando se obtiene:

$$v(x,y) = \int\left(-3e^{-3y}\operatorname{sen}(3x) - 6y\right)dy =$$

$$= e^{-3y}\operatorname{sen}(3x) - 3y^2 + \varphi(x).$$

Para hallar $\varphi(x)$ utilizamos la otra ecuación de Cauchy-Riemann;

$$v_x(x,y) = 3e^{-3y}\cos(3x) + \varphi'(x) \overset{C\text{-}R.}{=} -u_y(x,y) = -\left(-3e^{3y}\cos(3x) - 6(x-\pi)\right)$$

Por tanto, $\varphi'(x) = 6(x-\pi) \Rightarrow \varphi(x) = 3(x-\pi)^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$,

y $\quad v(x,y) = e^{-3y}\operatorname{sen}(3x) - 3y^2 + 3(x-\pi)^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

Para determinar la constante k no es necesario escribir f en función de z, pues

$$-1 = f(\pi) = u(\pi,0) + i\,v(\pi,0) = \cos(3\pi) + i(\operatorname{sen}(3\pi) + k)$$

$$= -1 + ki \Rightarrow k = 0.$$

Luego:

$$f(x+iy) = e^{-3y}\cos(3x) - 6(x-\pi)y + i\left(e^{-3y}\operatorname{sen}(3x) - 3y^2 + 3(x-\pi)^2\right)$$

y es una función entera pues u y v son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^2$.

Para expresar f en función de z basta considerar:

$$f(z) = u(z,0) + i v(z,0) = \cos(3z) + i\operatorname{sen}(3z) + 3i(z-\pi)^2,$$

que también se puede expresar:

$$f(z) = \frac{e^{i3z} + e^{-i3z}}{2} + i\,\frac{e^{i3z} - e^{-i3z}}{2i} + 3i(z-\pi)^2$$

$$= e^{i3z} + 3i(z-\pi)^2$$

3. Dada la función $f(z) = \operatorname{Log}(iz + 2 - 3i)$, donde Log indica la función logaritmo principal, se pide:

a) Determinar dónde es holomorfa y calcular $f'(z)$.

b) Teniendo en cuenta el apartado anterior calcular $\int_\Gamma \frac{dz}{iz+2-3i}$ donde Γ es el segmento que une 3 con $2i$.

a) Dado que para los únicos nºs complejos w para los que Log no es holomorfa es para los que verifican que $w \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, entonces los únicos $z = x+iy$ para los que f no es holomorfa son aquéllos tales que

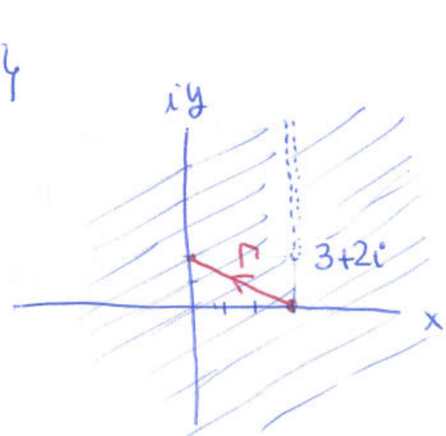
$$w = iz + 2 - 3i \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

y dado que

$$i(x+iy) + 2 - 3i \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - y + i(x-3) \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y \leq 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ x = 3 \end{cases}$$



entonces $\boxed{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{3 + iy : y \geq 2\})}$.

Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{3+iy : \geq 2\}$ se tiene

$$\boxed{f'(z)} \overset{R\text{-}C.}{=} (\operatorname{Log})'(iz+2-3i)\,\frac{d}{dz}(iz+2-3i)$$

$$= \boxed{\frac{i}{iz+2-3i}}$$

b) Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{3+iy : y \geq 2\}$ se tiene:

$$g(z) = \frac{1}{iz+2-3i} = \frac{1}{i} f'(z)$$, donde f' es la función calculada en a). Entonces $G(z) = \frac{1}{i} f(z) = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(iz+2-3i)$ es una primitiva de $g(z)$ en $\mathbb{C} \setminus \{3+iy : y \geq 2\}$ y, dado que $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{3+iy : y \geq 2\}$, se tiene:

$$\boxed{\int_\Gamma \frac{dz}{iz+2-3i}} \overset{\text{R. Barrow}}{=} G(2i) - G(3) = \frac{1}{i}\left(\operatorname{Log}(-3i) - \operatorname{Log} 2\right)$$

$$= -i\left(\ln|-3i| + i \operatorname{Arg}(-3i) - \ln 2 - i \operatorname{Arg} 2\right)$$

$$= \boxed{-\frac{\pi}{2} + i \ln(2/3)}$$

4. Calcule las siguientes integrales.

a) $\int_\Gamma |z|^2 (z-1)\, dz$ donde Γ es el arco de la circunf. de centro el origen y radio 2 que va desde 2 hasta -2 y está situado en el semiplano $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

$$\boxed{\int_\Gamma |z|^2 (z-1)\, dz} \underset{|z|=2 \text{ si } z\in\Gamma}{=} \int_\Gamma 4(z-1)\, dz \underset{\text{R. Barrow}}{=} F(-2) - F(2) =$$

$F(z) = 2(z-1)^2$ primitiva de $f(z) = 4(z-1)$ en $\mathbb{C}$

$$= 2\cdot(-3)^2 - 2 = \boxed{16}$$

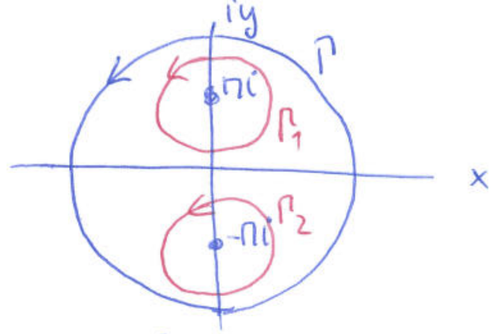
Nota: Obviamente, esta integral se puede calcular parametrizando Γ. Una parametrización sería $z(t) = 2e^{it}$ con $t \in [0, \pi]$, entonces

$$\int_\Gamma |z|^2 (z-1)\, dz = \int_0^\pi 4(2e^{it} - 1) \cdot 2ie^{it}\, dt = \ldots$$

b) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\cos(iz)}{z^2+\pi^2}\,dz$ donde Γ es la circunferencia centrada en el origen y radio 5 recorrida una vez en sentido positivo.

Se tiene que $z^2+\pi^2=0 \iff z=\pm\pi i$. Dado que $|\pm\pi i| = \pi < 5 \Rightarrow \pi i, -\pi i \in \mathrm{Int}(\Gamma)$.

Así resulta que $f(z) = \dfrac{\cos(iz)}{z^2+\pi^2}$ es holomorfa en $\overline{\mathrm{Int}(\Gamma)}\setminus\{\pm\pi i\}$ y se puede aplicar el teorema integral de Cauchy para múltiplemente conexos: Si Γ_1 y Γ_2 son contornos simples como muestra la figura, entonces:



$$\int_{\Gamma} \frac{\cos(iz)}{z^2+\pi^2}\,dz = \int_{\Gamma_1} \frac{\frac{\cos(iz)}{z+\pi i}}{z-\pi i}\,dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{\cos(iz)}{z-\pi i}}{z+\pi i}\,dz$$

Además, $f_1(z) = \dfrac{\cos(iz)}{z+\pi i}$ es holomorfa en $\overline{\mathrm{Int}(\Gamma_1)}$ y $f_2(z) = \dfrac{\cos(iz)}{z-\pi i}$ es holomorfa en $\overline{\mathrm{Int}(\Gamma_2)}$, entonces aplicando la Fórmula Integral de Cauchy a f_1 y a f_2:

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos(iz)}{z^2+\pi^2}\,dz \overset{\substack{z_1=\pi i\in \mathrm{Int}(\Gamma_1)\\ z_2=-\pi i\in\mathrm{Int}(\Gamma_2)}}{=} 2\pi i\, f_1(\pi i) + 2\pi i\, f_2(-\pi i) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos(-\pi)}{2i\pi} + \frac{\cos\pi}{-2i\pi}\right) = 0$$